| | |
|---|---|
| Mata Kuliah | : Matematika Terapan 1 |
| Kode Mata Kuliah | : KKTI14153 |
| Jumlah SKS | : 3 SKS |
| Nama Dosen | : Eddy Bambang |
| Minggu ke | : 6 |
| Tanggal | : 22 Oktober 2015 |
| Jadwal | : Kamis (07.00 – 08.40) |

# Limit Fungsi

**Ketunggalan limit fungsi**

Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$ maka $L = M$

**Operasi pada limit fungsi**

Misalkan $f$ dan $g$ adalah fungsi-fungsi yang terdefinisi pada selang buka *I* yang memuat *a* kecuali mungkin pada *a* sendiri dan misalkan limit *f* dan *g* di *a* ada, jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x) = N$, maka:

(i) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = M + N$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = M - N$

(iii) $\lim\limits_{x\to a} (f(x)g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right) = MN$

(iv) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{M}{N},\ asalkan\ \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

(v) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{M}$, dengan *n* bilangan positif dan $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$

(vi) Teorema akibat $\lim\limits_{x\to a} (kf(x)) = k \lim\limits_{x\to a} f(x) = kM$ *k* = konstanta.

**TURUNAN SEPIHAK**

Turunan kiri dari fungsi *f* di titik *c*, didefinisikan sebagai :

$$f_{-}^{'}(c) = \lim_{x\to c^{-}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Turunan kanan dari fungsi *f* di titik *c,* didefinisikan sebagai :

$$f_{+}^{'}(c) = \lim_{x\to c^{+}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limit ini ada.

Fungsi *f* dikatakan mempunyai turunan(diferensiabel) di *c* atau
ada, jika

sebaliknya *f*  dikatakan tidak mempunyai turunan di *c*.

dan $f'(c)=f'_-(c)=f'_+(c)$ $f'_-(c) = f'_+(c)$

sebaliknya *f*  dikatakan tidak mempunyai turunan di *c*.

Contoh : Diketahui $f(x)=\begin{cases} x^2-x+3 & , x<1 \\ 1+2\sqrt{x} & , x\ge 1\end{cases}$

Selidiki apakah *f*(*x*) diferensiabel di *x*=1 . Jika ya, tentukan $f'(1)$

JAWAB :

a. $= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x+3-(1+2\sqrt{1})}{x-1}$ $f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1$ $= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x-1}$

b. $= \lim_{x\to 1} \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}$ $f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= 2\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = 1$ $= \lim_{x\to 1} \frac{1+2\sqrt{x}-(1+2\sqrt{1})}{x-1}$

Jadi, *f*  diferensiabel di *x*=1 dan $f'(1)=1$.

Jika *f* diferensiabel di *c* ➔*f*  kontinu di *c*.

**Bukti :** Yang perlu ditunjukkan adalah $f(x)=f(c)+\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.(x-c)\ ,\ x\neq c$

Perhatikan bahwa $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Maka $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}\left[f(c)+\frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x-c)\right]$

$= \lim_{x\to c} f(c) + \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.\lim_{x\to c}(x-c)$

$= f(c)+f'(c).0$ = *f(c)*.  Terbukti.

Sifat tersebut tidak berlaku sebaliknya. Artinya, Jika *f*  kontinu di *c,* maka belum tentu *f* diferensiabel di *c*. Hal ini, ditunjukkan oleh contoh berikut.

**Contoh**  Tunjukkan bahwa *f* ( *x* ) = | *x* | kontinu di *x* = 0  tetapi tidak diferensiabel di *x* = 0

JAWAB :

Akan ditunjukkan bahwa f(x)=|x| kontinu di x=0

$f(x)=|x|=\begin{cases} x\ ,\ x\ge 0 \\ -x\ ,\ x<0\end{cases}$

f(0) = 0

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0 \\ \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0}(-x) = 0 \end{array}\right\} \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

**f kontinu di x=0**

Selidiki apakah f terdiferensialkan di x=0

$= \lim_{x\to 0} \frac{-x-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1 \;\; f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1. \;\; f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Karena $-1 = f'_-(0) \neq f'_+(0) = 1$

**maka *f* tidak diferensiabel di 0.**

**SOAL LATIHAN**

Tentukan nilai *a* dan *b* agar fungsi berikut diferensiabel di titik yang diberikan.

1. $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+3} & ; 0 \le x < 1 \\ x^2 - bx & ; x \ge 1 \end{cases}$ , *x* = 1

2. $f(x) = \begin{cases} ax - b & ; x < 2 \\ 2x^2 - 1 & ; x \ge 2 \end{cases}$ , *x* = 2